Teoría de Información y Codificación (66.24 — 86.11)

Práctica 6

1. *a*) Considerar un canal binario simétrico, con $X = \pm 1$ al que se le suma un ruido gaussiano con $\text{SNR}_1 = -2dB$, $\text{SNR}_2 = 0dB$, $\text{SNR}_3 = 6dB$, Calcular la capacidad, si usamos lógica de decodificación binaria "hard".

   b) Se usa un código de repetición $(n, 1)$, con n impar. Simular y graficar el comportamiento (p_e vs R) de este código para los dados valores de SNR, y distintos valores de n. Señalar en qué casos el rate del código está en la zona permitida por el teorema de Shannon.

   c) Analizar el caso de decodificación soft. ¿Es posible hacerlo de forma eficiente? ¿Es verdad (si lo es, justificar por qué) que minimizar la probabilidad de error en este caso corresponde a minimizar la distancia euclídea? (Optativo: simular y graficar)

2. El polinomio $g(x) = 1 + x + x^4$ genera un código cíclico de Hamming $(15, 11)$. (¿Por qué? Ver ejercicio Lin-Costello 4.6*c*). Se usa sobre un canal BSC con $p = 0.1$, $p = 0.01$, $p = 0.001$. Calcular (explicar cómo se obtiene y computar numéricamente) la probabilidad de que se produzca un error no detectado.

3. En el ejercio 1, calcular la capacidad con decodificación "soft"(manteniendo entrada binaria)

4. Mostrar cómo la matriz generadora G de un código lineal cualquiera puede transformarse para obtener un código sistemático. ¿En qué sentido ambos códigos son "equivalentes"?

5. Demostrar que la distancia mínima de un código lineal es igual al peso mímimo de los codewords no nulos. Demostrar que es igual a la mínima cantidad de columnas linealmende dependientes de H. Usar este resultado para construir un código de Hamming.

6. Caracterizar el çoset"de decodificación (fila del standard array) en relación a la ecuación del síndrome. Demostrar que el standard array no contiene elementos duplicados. Explicar cómo se obtiene el coset leader.

7. Dar las condiciones para que un polinomio $g(x)$ funcione como generador de un código cíclico (n, k). Dado (explícitamente) un código cíclico , obtener por inspección $g(x)$. Dado $g(x)$ encontrar el síndrome $s(x)$ (de qué grado es?). Dado $g(x)$ encontrar la matrix generadora.

8. Dado un polinomio generador $g(x)$ dar la ecuaciones (polinómicas) para codificar en forma sistemática.

9. Un polinomio $g(x) = 1 + x^2 + x^4 + x^6 + x^7 + x^{10}$ genera un código cíclico con $n = 21$ (cuánto es k?). Con solos estos datos, y sin más cálculo, decir cuáles de estos valores podemos obtener o acotar:

   a) Puede detectar hasta ? errores.

   b) Puede corregir hasta ? errores.

c) Puede detectar errores de ráfaga de longitud hasta ?.

d) Puede corregir errores de ráfaga de longitud hasta ?.

10. Ejercicios Lin-Costello (códigos cíclicos)

    a) (4.6) Mostrar que si $x+1$ es factor de $g(x)$ entonces los codewords tienen peso par. Mostrar que si $g(x)$ no divide a x^m+1 para ningún $m<n$ entonces el código tiene al menos distancia 3.

    b) (4.10) Mostrar que un código de Hamming generado con $g(X)=(1+x)p(x)$ donde $p(x)$ es primitivo de grado m, con $n=2^m-1$ puede corregir no solo un error sino también dos si se producen en lugares adyacentes.(Hint: mostrar que dos pattern de errores tales no pueden corresponder a la misma fila del standard array)

    c) (4.12) Mostrar que si un cierto pattern de error $e(x)$ es detectable, también lo es su rotación cíclica.

11. (Morreira-Farrel 3.2) Verificar que $g(X)=1+x^2+x^3+x^4$ genera un código cíclico $(8,5)$. Codificar el mensaje 10101 en forma sistemática