Teoría de Información y Codificación

Ejercicios adicionales (temas correspondientes al primer parcial)

1. Calcular la tasa de entropía H_r de una fuente de Markov estacionaria con m símbolos, con probabilidades inciales $P(X_0)$ y condicionales $P(X_n \mid X_{n-1})$ dadas.

2. Sea X la v.a correspondiente a un dado no necesariamente equilibrado (las probabilidades de cada cara no son necesariamente $1/6$) Se sabe, sin embargo, que es igualmente probable que la cara sea par o impar. Si se conocen $H_P = H(X \mid Xpar)$ y $H_I = H(X \mid Ximpar)$, hallar $H(X)$.

3. Tenemos las variables aleatorias independientes $Z_1, Z_2, Z_3 \cdots$ que toman valores $\{0, 1\}$ con igual probabilidad. Sea
$$X_n = \sum_{i=1}^{n} Z_i$$
Encontrar $I(X_1; X_2, X_3, ..., X_n)$

4. Sean $X \to Y \to Z$ variables discretas que forman una cadena de Markov.
   a) Demostrar $H(Z \mid Y) \leq H(Z \mid X)$
   b) Demostrar $I(Z; Y) \geq I(Z; X)$

5. Sean X, Y, Z tres variables Bernoulli con $p = 1/2$. Si se sabe que $I(X; Y) = I(X; Z) = I(Y; Z) = 0$. Decidir si con estos datos se puede calcular $H(X, Y, Z)$. Si se puede, encontrar el valor. Si no, encontrar el mínimo y máximo valor posible.

6. Demostrar que $H(X \mid X + Y) = H(Y \mid X + Y)$. ¿Es verdad que $H(X + Y) = H(X, Y)$, en general, o bajo qué condiciones?

7. X_t es un proceso de Markov de primer orden, estacionario. Analizar si es verdad que
   a) $H(X_t|X_{t-1}) \leq H(X_t|X_{t-2})$
   b) $I(X_4; X_1) + I(X_2; X_3) \leq I(X_4; X_3) + I(X_2; X_1)$

8. Demostrar que para un dado $\epsilon > 0$, $P(X^n \in A_\epsilon^n) \to 1$ cuando $n \to \infty$

9. Una caminata aleatoria X_t empieza en el sitio 0 en el instante inicial ($X_0 = 0$) y en cada instance se mueve un lugar a la derecha con probabilidad a, o dos lugares a la izquierda con probabilidad $1 - a$; es decir: $P(X_{t+1} = X_t + 1) = a$ y $P(X_{t+1} = X_t - 2) = 1 - a$. Calcular la tasa de entropía.

10. El conjunto de variables $X_1, X_2 \cdots X_n$ cumple $H(X_1) \leq H(X_2) \leq \cdots \leq H(X_n)$. Si se conoce sólo $H(X_n)$, cuáles son los valores mínimo y máximo que puede alcanzar $H(X_1, X_2 \cdots X_n)$? Explicar en qué condiciones se alcanzarían esos extremos.

11. Analizar si estas afirmaciones son verdaderas o falsas (o ambiguas). Demostrar, dar contra-ejemplo, explicar, desarrollar, según corresponda.
    a) Si $H(X|Y) = 0$ entonces X e Y son independientes
    b) La tasa de entropía de una fuente estacionaria no puede exceder la entropía marginal (entropía de la fuente sin extensión): $H_r = \lim_{n\to\infty} H(X_1, X_2 \cdots X_n)/n \leq H(X_1)$
    c) Si $Y = 3X + 4$ entonces $H(Y) = H(X)$
    d) Sean X, Z dos variables aleatorias cualesquiera. Entonces $H(X + Z|Z) = H(X)$

e) $I(X;Y) = 0$ si y solo si X e Y son independientes

f) Las secuencias que caen dentro del conjunto típico $A_\epsilon^{(n)}$ son aproximadamente equiprobables; esto es tanto más cierto cuanto más pequeño es ϵ

g) Sean X, Y variables discretas, ambas con soporte en $1, 2 \cdots n$. Entonces $H(X|Y) \leq H(X|Y = j)$ para cualquier $j = 1, 2 \cdots n$

h) $H(X|Y, Z) \leq H(X;Y)$

i) Si $H(X + Y|Y) = H(X)$

j) $I(X;Y|Z) \leq I(X;Y)$

k) $H(X \mid Z) \leq H(X, Y \mid Z)$

l) $I(X;X) = H(X)$

---

12. Queremos codificar n símbolos con un código binario únicamente decodificable. Se pretende codificar los tres primeros símbolos con 3 bits , y el resto con 8 bits. Encontrar el máximo valor de n.

13. Para un código, sean $p(i), p(j)$ las probabilidades de dos símbolos, y ℓ_i, ℓ_j las longitudes de las palabras de código. Si el código es óptimo entonces se cumple que

$$p(i) > p(j) \implies \ell_i \boxed{?} \ell_j$$

Decidir qué desigualdad poner para que la afirmación sea verdadera. Demostrar.

14. Se tiene un código binario instantáneo de una fuente de n símbolos, que contiene un codeword (palabra de código) de n bits de largo.

a) Demostrar que no puede ser un código de Huffman

b) Demostrar que no puede ser un código óptimo

15. Diseñar el código de Humman ternario de una fuente con probabilidades $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{9}, \frac{1}{9})$. Calcular la longitud promedio. Alcanza la cota de Shannon? ¿Se mejoraría la tasa de compresión de utilizar extensiones de la fuente (asumiendo que los símbolos son independientes) ?

16. Se quiere codificar una fuente de $n = 15$ símbolos con un código instántaneo ternario. Se propone asignar una longitud de código $l_i = 2$ a los 6 símbolos más probables y $l_i = 3$ a los 9 restantes. Decidir si es posible armar un código asi. ¿Es posible afirmar, sin conocer más sobre las probabilidades, si el código es óptimo o subóptimo?

17. Una fuente de Markov estacionaria X_n tiene 33 símbolos. Para todo n, las probabilidades de cada símbolo son

$$P(X_n = j) = \begin{cases} 1/2 & j = 0 \\ 1/64 & j \neq 0 \end{cases}$$

Las probabilidades de transición están dadas por

$$P(X_{n+1} = j|X_n = 0) = \begin{cases} 1/2 & j = 0 \\ 1/64 & j \neq 0 \end{cases}$$

$$P(X_{n+1} = j|X_n = i) = \begin{cases} 1/2 & j = 0 \\ 1/2 & j = i \\ 0 & \text{sino} \end{cases}$$

a) Calcular la entropía $H(X_1)$

b) Dar la definición de tasa de entropía H_r y calcularla

c) Calcular $H(X_2 \mid X_1)$, $H(X_1, X_2)$ y $H(X_1, X_2, X_3, X_4)$

d) Se arma el código de Huffman (no se pide escribirlo) sin usar extensiones de la fuente. Acotar la longitud de este código, si es posible, en función de algunas de las entropías anterios . ¿Es posible afirmar en este caso que se alcanza la cota?

e) Lo mismo, si se usan extensiones de orden 2 o de orden $m \to \infty$

18. Una fuente emite 4 símbolos $(0, 1, 2, 3)$, X_0 tiene una distribución equiprobable, mientras que $X_{n+1} = X_n + Z_n \pmod 4$ donde Z_n toma los valores $(1, 2)$ con igual probabilidad (independiente de X). Calcular la tasa de entropía y encontrar (o acotar o aproximar) la longitud promedio de código que se obtendría usando:

    a) Código Huffman sin extensión (extensión 1).

    b) Código Huffman de extensión 2

    c) Código Huffman de extensión $n \to \infty$

    d) Código aritmético

19. Una fuente sin memoria X emite 2 símbolos con probabilidades $p(A) = 0.1, p(B) = 0.9$. Sea $L(n)$ la longitud media del código de Huffman binario, usando la extensión de orden n.

    Obtener (o, si es complicado, acotar): $L(1)$, $L(2)$ y $L(100)$

20. Una fuente con cinco símbolos con probabilidades $p_1(x)$ se codifica con el código C_1, y lo mismo para $p_2(x)$ y C_2

Símbolo	$p_1(x)$	C_1	$p_2(x)$	C_2
A	1/2	0	1/2	1
B	1/4	10	1/8	011
C	1/8	111	1/8	010
D	1/16	1101	1/8	001
E	1/16	1100	1/8	000

    a) Determinar si ambos códigos son instantáneos.

    b) Alguien afirma que uno de estos códigos no es óptimo, y que armando el código de Huffman correspondiente se obtendría una longitud promedio menor. ¿Es verdad?

    c) Si en lugar de estos códigos se usara el código de Huffman correspondiente a la extensión de orden 2. ¿cuál sería la longitud promedio?

    d) Si para codificar la fuente con $p_1(x)$ se usa el código C_2 , ¿se pierde eficiencia? Relacionar con la entropía relativa (distancia de Kullback Leibler)

21. Una fuente emite 4 símbolos A, B, C, D con probabilidades $(0.1, 0.25, 0.25, 0.4)$. Armar el código de Huffman, calcular su longitud promedio L. Escribir la expresión de la entropía por símbolo de la fuente $H(X)$ (no calcular su valor numérico). En base a la longitud del código obtenido antes, ¿cómo puede acotarse la entropía?

22. Decidir si los siguientes códigos de una fuente de 4 símbolos podrían corresponder a un código de Huffman válido

    a) 01, 10, 00, 111

    b) 000, 010, 110, 111

c) 1, 01, 10, 00

d) 0, 110, 111, 101

23. Alguien ha armado un código instantáneo de una fuente, con $\ell(1) > \ell(2)$ y $p_1 > p_2$ (de un par de símbolos, el de mayor probabilidad tiene longitud de código mayor). Demostrar que este código no es óptimo, porque es posible armar (explicar cómo) un código instantáneo mejor.

24. Para una fuente con n símbolos, sean $\ell = (l_1, l_2, \cdots l_n)$ las longitudes de un código binario instántaneo válido (cumple la desigualdad de Kraft), con $l_1 < l_2$. Entonces, las longitudes $\ell' = (l_1 + 1, l_2 - 1, \cdots l_n)$ (sólo se modifican esas dos longitudes) también cumplen la desigualdad de Kraft. (Hint: $a/2 \geq b > 0 \implies a/2 + 2b \leq a + b$)

25. *a*) Una fuente X emite 200 símbolos equiprobables, independientes. Sea L_h la longitud media del código de Huffman binario (sin extensión). Acotar L_h.

    b) Si se toman extensiones de la fuente, explicar el comportamiento de $L_h^{(n)}$.

    c) Sea Y la salida del codificador (secuencia de ceros y unos generados por el código), en el escenario anterior. Calcular o acotar la tasa de entropía de Y.

26. Se quiere codificar una fuente de $n = 15$ símbolos con un código instántaneo ternario. Se propone asignar una longitud de código $l_i = 2$ a los 6 símbolos más probables y $l_i = 3$ a los 9 restantes. Decidir si es posible armar un código asi. ¿Es posible afirmar, sin conocer más sobre las probabilidades, si el código es óptimo o subóptimo?

27. Una fuente emite 6 símbolos A, B, C, D, E, F con $p = (\ 1/2\ 1/4\ 1/8\ 1/16\ 1/32\ 1/32\ )$.

    a) Calcular la entropía

    b) Para una dada longitud n, cuántas secuencias posibles hay? Cuál es la secuencia más probable y cuál es su probablilidad?

    c) Cómo evaluar si la secuencia obtenida anteriormente pertenece al conjunto típico para un dado ϵ?

    d) Armar el código de Huffman? Es óptimo? Mejoraría si se toman extensiones de la fuente de orden $n > 1$?

28. Analizar si estas afirmaciones son verdaderas o falsas (o ambiguas). Demostrar, dar contraejemplo, explicar, desarrollar, según corresponda.

    a) Una fuente emite símbolos no independientes, de manera que $H(X_i) = 8$ bits y $H_r = \lim_{n\to\infty} H(X_1, X_2 \cdots X_n)/n = 5$ bits. Sea L la longitud promedio del código de Huffman armado según las probabilidades de los símbolos individuales $P(X_i)$ (no extendido). Entonces podemos afirmar que $5 \leq L < 6$

    b) Si las probabilidades de los simbolos de una fuente son de la forma $p(x_i) = 1/2^{k_i}$, entonces la tasa del código de Huffman (sin extensiones) alcanza la entropía H.

    c) El código $\{01, 011, 11\}$ es unicamente decodificable.

    d) El código $\{10, 01, 11, 101\}$ no es instantáneo, pero es unicamente decodificable.

    e) El código $\{0, 10, 110, 1110\}$ no puede ser el código de Huffman de una fuente.

    f) Una fuente emite 5 símbolos equiprobables, independientes. Entonces $L_h > H$, donde L_h es la longitud media del código de Huffman, y H es la entropía. Por otro lado, si se construye el código de Huffman para extensiones de la fuente, la longitud media ($L_h^{(n)}$ disminuye.

g) Se desea armar un código binario unívocamente decodificable para una fuente con 7 símbolos, código binario. Si los dos primeros símbolos se codifican con 2 bits cada uno, entonces alguno de los 5 simbolos restantes debe codificarse con más de 3 bits.

h) El armado del código de Huffman puede resultar en códigos distintos, con longitudes de código de algunos símbolos diferente. Sin embargo, la longitud promedio será la misma.

i) La longitud de un código instantáneo ternario alcanzará la entropía sí y solo si las probabilidades de los símbolos son de la forma $(1/3)^k$ con k entero.

j) Un código instantáneo siempre es únicamente decodificable

k) Un código de Huffman (binario o no) siempre es instantáneo

l) El codigo aritmético siempre alcanza asintoticamente la cota de Shannon para la compresión: ($L \to H_r$ cuando $n \to \infty$)

m) La cantidad de códigos instantáneos que existen, para una dada fuente, es finita.

n) Para una dada fuente, sea L_I la longitud del mejor código de entre todos los posibles códigos instantáneos. Lo mismo para L_U (sobre los códigos unicamente decodificables). Entonces $L_U = L_I$.

29. Explicar cómo se parsea con LZ77 y con LZ78 la secuencia `AAAAABBABABAAAAABBABAB`

---

30. Obtener la capacidad del canal de borrado simétrico: $P(Y = \epsilon|X = 0) = (Y = \epsilon|X = 1) = p$

31. Encontrar la capacidad del canal Z :

$$P(Y = 0 \mid X = 0) = 1$$
$$P(Y = 1 \mid X = 1) = P(Y = 0 \mid X = 1) = \frac{1}{2}$$

32. Un canal con cuatro símbolos (igual alfabeto que problema 1) trasmite con probabilidad 1/2 el símbolo original, con probabilidad 1/4 uno de los símbolos adyacentes:

$$P(X|Y) = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & 0 & 1/4 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/4 & 0 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix}$$

a) Calcular la capacidad del canal.

b) Alguien propone una codificación consistente en repetir cada símbolo 3 veces, y luego decodificar maximizando el likelihood. ¿Cuál sería la tasa (rate) R de esta codificación? ¿Corresponde esta tasa a la zona "permitida" por el segundo teorema de Shannon, de manera que permitiría, a priori, esperar una tasa de errores baja, o no?

33. Un canal con entrada binaria $X \in \{0, 1\}$ tiene 4 salidas posibles: $Y \in \{\alpha, 0, 1, \beta\}$ con la siguiente matrix de transición:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} \alpha & 0 & 1 & \beta \end{array} \\ M = & \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} \end{array}$$

a) Encontrar la capacidad de este canal, y la distribución de entrada correspondiente.

b) Proponer un esquema de codificación si se dispone de feedback (el receptor puede pedir al emisor que vuelva a trasmitir) ¿Alcanza la capacidad?

c) Sea $W = 1$ si $X = Y$, $W = 0$ si no. Calcular $I(X; Y|W)$. Interpretar en términos de la capacidad del canal supuesto conocido W.

34. Una fuente emite símbolos de un alfabeto $\{A, B, C, D\}$. En cada instante puede emitir solo uno de los dos símbolos adyacentes al anterior; es decir, si $X_{t-1} = B$ entonces $X_t = A$ o $X_t = C$ (la lista de símbolos se considera cíclica). Suponer que las dos alternativas son equiprobables, y que en el instante inicial ($t = 0$) se emiten cualquiera de los 4 primeros símbolos con igual probabilidad.
Calcular $H(X_0)$, $H(X_t|X_{t-1})$ ($t > 0$), $H(X_7)$, $H(X_7, X_8)$,
¿Qué nos dice el primer teorema de Shannon sobre esta fuente?
Proponer un código instantáneo, y evaluar si es óptimo.

35. Tenemos un canal con $Y_i = X_i + Z_i$ donde $X_i, Y_i \in \{0, 1\}$ y la suma es en módulo 2. Z_i (el ruido") es Bernoulli con $P(Y_i) = p$

    a) Calcular la capacidad del canal, asumiendo que Z_i son independientes,

    b) En general (sin asumir que Z_i son independientes) , demostrar que

    $$\max I(X_1, X_2 \cdots X_n; Y_1, Y_2 \cdots Y_n) \geq n\,(1 - h(p))$$

    en donde el máximo es sobre todas las posibles distribuciones conjuntas de la entrada, y $h(p)$ es la función de entropía binaria.

    c) En base a lo anterior, es posible afirmar que el hecho de que el canal tenga memoria (es decir, que los valores del ruidoZ_i no sean independientes entre sí) en general aumenta o disminuye la capacidad de este canal?

36. Calcular la capacidad de una concatenación de dos BSC con igual p.

37. Se tienen dos canales con entradas y salidas (X_1, Y_1) y (X_2, Y_2) respectivamente, y capacidades C_1,C_2 . Los canales son independientes (la entrada de uno no influye en la salida del otro). Se crea un nuevo canal usando ambos canales anteriores “en paralelo”, de manera que en cada uso del nuevo canal se trasmite simultáneamente una tupla o par (x_1, x_2), y a la salida se recibe (y_1, y_2). Calcular la capacidad de este canal.

38. Verdadero o falso? Justificar

    a) Un canal (discreto sin memoria) tiene dos símbolos de entrada y tres de salida. Entonces su capacidad no puede exceder 1 bit (por uso de canal).

    b) La capacidad de un canal es 0 si y solo si $p(y_j|x_i) = h(j)$ es decir, si las probabilidades de transición son constantes (no dependen de la entrada) para una determinada salida.

39. Se tiene un canal de dos entradas y tres salidas

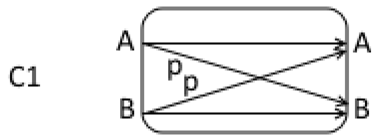
    $$M = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & b & a \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \end{array}$$

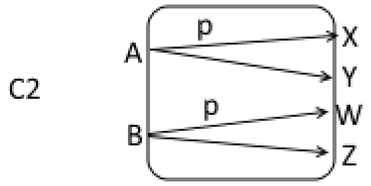
    con $a + b + c = 1$. Encontrar la capacidad de este canal, y la distribución de entrada correspondiente, para el caso particular $c = 0$ y para el caso general.

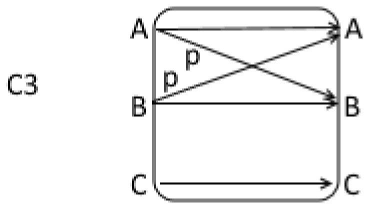
40. Encontrar la capacidad del canal con la siguente matriz de transición. Justificar y explicar cuál es la distribución de entrada $p(X)$ correspondiente.

    $$P_{Y|X} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/4 & 1/2 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}$$

41. Calcular la capacidad de estos canales. En el caso $C3$, tomar $p = 0$, $p = 1/2$ y $p = 1$







42. Armamos un canal c concatenando (en serie) los canales c_1 y c_2.
Demostrar $C(c) \leq min(C(c_1), C(c_2))$